Wybrane zastosowania pochodnych – badanie funkcji

Wiele zagadnień, o których była mowa w tym i poprzednich rozdziałach, wykorzystamy teraz przy badaniu przebiegu zmienności funkcji. Celem takiego badania jest zebranie możliwie pełnej informacji o danej funkcji, a następnie na podstawie uzyskanych danych – sporządzenie jej wykresu. Badając funkcję będzie posługiwać się następującym schematem:

1° Wyznaczamy dziedzinę funkcji.

2° Znajdujemy granice funkcji na krańcach dziedziny.

3° Badamy istnienie asymptot.

4° Wyznaczamy punkty wspólne wykresu z osiami układu współrzędnych.

5° Badamy niektóre własności funkcji (parzystość, nieparzystość, okresowość).

6° Wyznaczamy ekstrema funkcji oraz przedziały monotoniczności (badamy pierwszą pochodną funkcji).

7° Badamy kształt wypukłości wykresu funkcji oraz wyznaczamy punkty przegięcia (badamy drugą pochodną funkcji).

8° Sporządzamy tabelkę zmienności funkcji.

9° Sporządzamy wykres funkcji.

Przykład 9. Zbadać przebieg zmienności funkcji:

a) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$, b) $f(x)=x\,e^{\frac{1}{x}}$, c) $f(x)=x^2\ln x$.

Rozwiązanie.

a) 1° $D_f=\mathbb{R}$,

2° $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{1+x^2}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2x}=0$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{1+x^2}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x}=0$.

3° Brak asymptot pionowych (żadna liczba rzeczywista nie jest krańcem dziedziny).

Prosta $y=0$ jest asymptotą poziomą obustronną (wynika z 2°).

Ponieważ istnieją asymptoty poziome zatem nie trzeba szukać asymptot ukośnych.

4° Punkt przecięcia wykresu badanej funkcji z osią *Oy* otrzymujemy obliczając $f(0)$, natomiast aby wyznaczyć punkty przecięcia z osią *Ox* należy rozwiązać równanie $f(x)=0$. Mamy zatem:

$f(0)=0$,

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x}{1+x^2}=0 \Leftrightarrow x=0.$$

Więc jedynym punktem wspólnym wykresu z osiami układu współrzędnych jest początek układu współrzędnych, tj. punkt $(0,0)$.

5° Ponieważ dla każdego $x\in\mathbb{R}$:

$$f(-x)=\frac{-x}{1+(-x)^2}=-\frac{x}{1+x^2}=-f(x),$$

zatem dana funkcja jest nieparzysta.

6° Aby wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji oraz wyznaczyć jej ekstrema lokalne badamy pierwszą pochodną:

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2},$$

$$D_{f'}=\mathbb{R}.$$

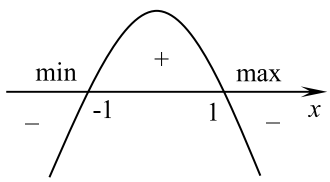
$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=0 \Leftrightarrow 1-x^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \vee x=1.$$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}>0 \Leftrightarrow 1-x^2>0 \Leftrightarrow$$

$x\in(-1,1)$ (rysunek 7).

$f'(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty).$



Rys. 7. Wykres zmiany znaku pochodnej funkcji z przykładu 9a)

Stwierdzamy zatem, że:

1) w przedziale $(-\infty,-1)$ i $(1,+\infty)$ funkcja jest malejąca,

2) w przedziale $(-1,1)$ funkcja jest rosnąca,

3) dla $x=-1$ funkcja osiąga minimum lokalne, $y_{\min}=f(-1)=-\frac{1}{2}$;

dla $x=1$ funkcja osiąga maksimum lokalne, $y_{\max}=f(1)=\frac{1}{2}$.

7° Badamy drugą pochodną:

$$f''(x)=\frac{-2x(x^2+1)^2-(1-x^2)\cdot 2\cdot(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}=$$

$$=\frac{(x^2+1)\left[-2x(x^2+1)-4x(1-x^2)\right]}{(x^2+1)^4}=\frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3},\quad D_{f''}=\mathbb{R}.$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}=0 \Leftrightarrow 2x^3-6x=0 \Leftrightarrow 2x(x^2-3)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\sqrt{3} \vee x=-\sqrt{3}.$$

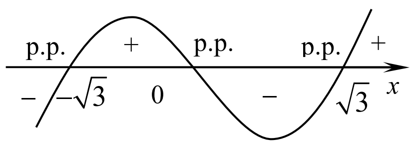
Ponieważ wyrażenie występujące w mianowniku drugiej pochodnej jest dodatnie dla każdego $x\in\mathbb{R}$, zatem:

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow \frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^3-6x>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(-\sqrt{3},0\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right).$$



Rys. 8. Wykres zmiany znaku drugiej pochodnej funkcji z przykładu 9a)

$$f''(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(0,\sqrt{3}\right).$$

Stąd:

1) w przedziałach: $\left(-\sqrt{3},0\right)$, $\left(\sqrt{3},+\infty\right)$ wykres funkcji jest wypukły w dół,

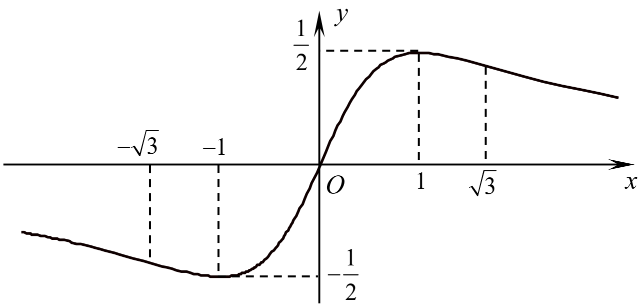
2) w przedziałach: $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$, $\left(0,\sqrt{3}\right)$ wykres funkcji jest wypukły w górę,

3) punkty przegięcia wykresu funkcji: $P_1\left(-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $P_2(0,0)$, $P_3\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

8° Na podstawie zebranych informacji tworzymy tabelkę zmienności funkcji. Z powodu braku miejsca w pierwszym wierszu tabeli zamiast zapisywać kolejne przedziały użyto symbolu „ ... ” – przykładowo pierwszy taki symbol oznacza przedział $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$. Kształt (wygięcie) oraz kierunek strzałek ustalamy na podstawie znaku pierwszej i drugiej pochodnej. Strzałki te obrazują monotoniczność oraz kształt wypukłości wykresu funkcji w kolejnych przedziałach.

x	...	$-\sqrt{3}$	...	-1	...	0	...	1	...	$\sqrt{3}$	...
$f'(x)$	–	–	–	0	+	+	+	0	–	–	–
$f''(x)$	–	0	+	+	+	0	–	–	–	0	+
$f(x)$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$ p.p.		$-\frac{1}{2}$ min		0 p.p.		$\frac{1}{2}$ max		$\frac{\sqrt{3}}{4}$ p.p.	0

9° W oparciu o powyższą tabelkę sporządzamy wykres funkcji (rysunek 8.9).



Rys. 9. Wykres funkcji z przykładu 9a)

b) 1° $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

2° $\lim\limits_{x\to 0^-} x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \left[0 \cdot \mathrm{e}^{\frac{+}{0^-}}\right] = \left[0 \cdot \mathrm{e}^{-\infty}\right] = \left[0 \cdot 0\right] = 0,$

$$\lim_{x\to 0^+} x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \left[0 \cdot \mathrm{e}^{\frac{+}{0^+}}\right] = \left[0 \cdot \mathrm{e}^{+\infty}\right] = \left[0 \cdot \infty\right] = \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \left[-\infty\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{-\infty}}\right] = \left[-\infty\cdot\mathrm{e}^{0}\right] = \left[-\infty\cdot 1\right] = -\infty\,,$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \left[+\infty\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{+\infty}}\right] = \left[+\infty\cdot\mathrm{e}^{0}\right] = \left[+\infty\cdot 1\right] = +\infty\,.$$

3° Na podstawie punktu 2° stwierdzamy, że prosta $x=0$ jest asymptotą pionową prawostronną oraz, że wykres funkcji nie posiada asymptot poziomych. Sprawdzamy istnienie asymptot ukośnych. Dla asymptoty lewostronnej obliczamy granice:

$$m = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \left[\mathrm{e}^{0}\right] = 1\,,$$

$$n = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right] = \lim_{x\to-\infty}\left(x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-x\right) = [\infty-\infty] = \lim_{x\to-\infty} x\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\right) =$$

$$= [\infty\cdot 0] = \lim_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 1\,,$$

a zatem prosta $y = x+1$ jest asymptotą ukośną lewostronną.

Łatwo można sprawdzić (obliczając w taki sam sposób odpowiednie granice w $+\infty$), że prosta ta jest również asymptotą ukośną prawostronną, a co za tym idzie jest ona asymptotą ukośną obustronną.

4° Biorąc pod uwagę dziedzinę stwierdzamy, że wykres badanej funkcji nie ma punktów wspólnych z osią *Oy*. Rozwiązując równanie $f(x)=0$ sprawdzamy, czy wykres funkcji będzie przecinał oś *Ox*:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 0 \Leftrightarrow \left\{\forall_{x\in\mathbb{R}}\ \mathrm{e}^{v(x)}>0\right\} \Leftrightarrow x = 0 \notin D_f\,,$$

czyli wykres funkcji nie ma punktów wspólnych również z osią *Ox*.

5° Badamy parzystość (nieparzystość) funkcji:

$f(-x) = -x\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \neq f(x)$ (i $\neq -f(x)$) – dana funkcja nie jest ani parzysta, ani nieparzysta.

6° Badamy pierwszą pochodną:

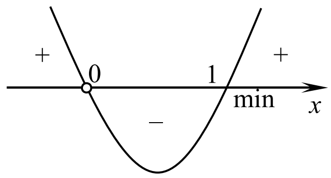
$$f'(x) = 1 \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{x-1}{x}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}, \quad D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \leftarrow \begin{matrix}\text{punkt}\\ \text{stacjonarny}\end{matrix},$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)x > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty),$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0,1).$$



Rys. 10. Wykres zmiany znaku pochodnej funkcji z przykładu 9b)

Stwierdzamy zatem, że:

1) w przedziale $(-\infty, 0)$ i $(1, +\infty)$ funkcja jest rosnąca,
2) w przedziale $(0,1)$ funkcja jest malejąca,
3) dla $x = 1$ funkcja osiąga minimum lokalne, $y_{\min} = f(1) = \mathrm{e}$;

7° Badamy drugą pochodną:

$$f''(x) = \frac{1 \cdot x - (x-1) \cdot 1}{x^2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + \frac{x-1}{x}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - \frac{x-1}{x^3}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \frac{x - x + 1}{x^3}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^3}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}, \quad D_{f''} = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

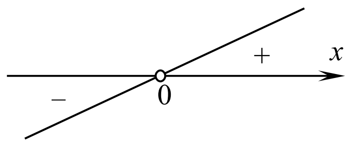
Zauważmy, że równanie $f'(x) = 0$ równoważne równaniu $\frac{1}{x^3}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 0$ nie ma rozwiązań, a co za tym idzie wykres funkcji nie ma punktów przegięcia.

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^3}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^3} > 0 \Leftrightarrow x^3 > 0 \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow x \in (0, +\infty),$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0).$$

Zatem:

1) w przedziale $(-\infty, 0)$ wykres funkcji jest wypukły w górę,
2) w przedziale $(0, +\infty)$ wykres funkcji jest wypukły w dół,



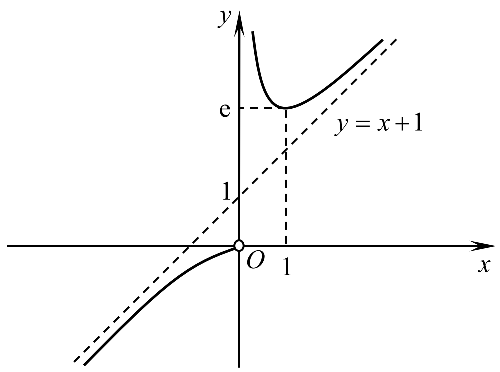
Rys. 11. Wykres zmiany znaku drugiej pochodnej funkcji z przykładu 9b)

3) wykres funkcji nie posiada punktów przegięcia.

8° Tabelka zmienności funkcji

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0,1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow 0$		$+\infty \searrow$	e min	$\nearrow +\infty$

9° Wykres funkcji (rysunek 12)



Rys. 12. Wykres funkcji z przykładu 9b)

c) 1° $D_f = (0, +\infty)$,

2° $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 \ln x = [0 \cdot (-\infty)] = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x^2}} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{2}{x^3}} = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(-\dfrac{x^2}{2}\right) = 0$,

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \ln x = [+\infty \cdot (+\infty)] = +\infty$.

3° Na podstawie granic obliczonych w punkcie 2° stwierdzamy, że wykres badanej funkcji nie posiada asymptot pionowych oraz poziomych.

Sprawdzamy istnienie asymptoty ukośnych – biorąc pod uwagę dziedzinę funkcji, może istnieć jedynie asymptota ukośna prawostronna.

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 \ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} x\ln x = \left[+\infty\cdot(+\infty)\right] = +\infty .$$

Zatem wykres funkcji nie posiada również asymptot ukośnych.

4° Biorąc pod uwagę dziedzinę stwierdzamy, że wykres badanej funkcji nie ma punktów wspólnych z osią *Oy*. Sprawdzamy jeszcze, czy wykres przecina oś *Ox*:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 \ln x = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \vee \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \notin D_f \vee x = 1 .$$

Punkt przecięcia wykresu z osią *Ox*: $P(1,0)$.

5° Uwzględniając dziedzinę funkcji stwierdzamy, że nie jest ona ani parzysta, ani nieparzysta.

6° Obliczamy pierwszą pochodną i przyrównujemy ją do zera:

$$f'(x) = 2x\cdot\ln x + x^2\cdot\frac{1}{x} = x(2\ln x+1),\quad D_{f'} = (0,+\infty).$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(2\ln x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0\,(\notin D_{f'}) \vee 2\ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln x = \ln \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \approx 0{,}61 .$$

Badamy teraz, jak się zmienia znak pierwszej pochodnej. Rozwiązując odpowiednie nierówności (podobnie, jak powyższe równanie) uwzględniamy od razu dziedzinę pochodnej:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x(2\ln x+1) > 0 \Leftrightarrow \{x\in(0,+\infty)\} \Leftrightarrow 2\ln x+1 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x > \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x \in \left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right),$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x(2\ln x+1) < 0 \Leftrightarrow \{x\in(0,+\infty)\} \Leftrightarrow 2\ln x+1 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x < \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x \in \left(0,\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Stwierdzamy zatem, że:

1) w przedziale $\left(0,\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)$ funkcja jest malejąca,

2) w przedziale $\left(e^{-\frac{1}{2}}, +\infty \right)$ funkcja jest rosnąca,

3) dla $x = e^{-\frac{1}{2}}$ funkcja osiąga minimum lokalne równe:

$$y_{\min} = f\left(e^{-\frac{1}{2}} \right) = \left(e^{-\frac{1}{2}} \right)^2 \ln\left(e^{-\frac{1}{2}} \right) = e^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2} e^{-1} \approx -0{,}18 ;$$

7° Badamy drugą pochodną:

$$f''(x) = \left[x(2\ln x + 1) \right]' = 1 \cdot (2\ln x + 1) + x \cdot \frac{2}{x} = 2\ln x + 3 , \quad D_{f''} = (0, +\infty) .$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2\ln x + 3 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \ln x = \ln e^{-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{3}{2}} \approx 0{,}22 .$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2\ln x + 3 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x > e^{-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x \in \left(e^{-\frac{3}{2}}, +\infty \right),$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2\ln x + 3 < 0 \Leftrightarrow x < e^{-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x \in \left(0 , e^{-\frac{3}{2}} \right) .$$

Zatem:

1) w przedziale $\left(0 , e^{-\frac{3}{2}} \right)$ wykres funkcji jest wypukły w górę,

2) w przedziale $\left(e^{-\frac{3}{2}}, +\infty \right)$ wykres funkcji jest wypukły w dół,

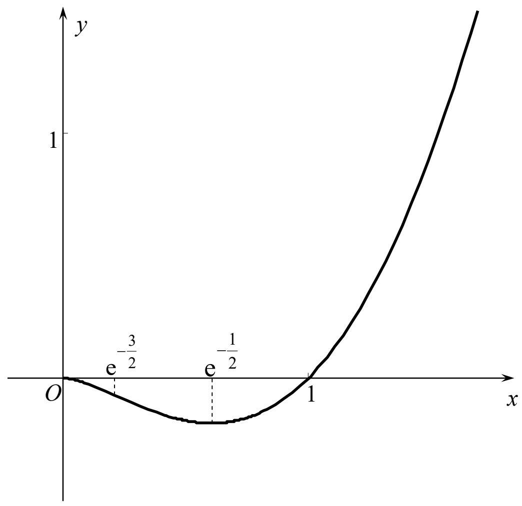
3) dla $x = e^{-\frac{3}{2}}$ wykres funkcji ma punkt przegięcia oraz

$$y_{p.p.} = f\left(e^{-\frac{3}{2}} \right) = \left(e^{-\frac{3}{2}} \right)^2 \ln\left(e^{-\frac{3}{2}} \right) = e^{-3} \cdot \left(-\frac{3}{2} \right) = -\frac{3}{2} e^{-3} \approx -0{,}07 .$$

8° Tabelka zmienności funkcji

x	$\left(0, e^{-\frac{3}{2}}\right)$	$e^{-\frac{3}{2}}$	$\left(e^{-\frac{3}{2}}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$	$e^{-\frac{1}{2}}$	$\left(e^{-\frac{1}{2}}, 1\right)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	0 $\searrow$	$-\frac{3}{2}e^{-3}$ p.p.	$\searrow$	$-\frac{1}{2}e^{-1}$ min	$\nearrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$

9° Wykres funkcji (rysunek 13)



Rys. 13. Wykres funkcji z przykładu 9c)

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zbadać przebieg zmienności funkcji:

82. $f(x) = x^2 - 4x^3 + 4x^2$, **83.** $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$,

84. $f(x) = \dfrac{x^3}{x-1}$,

85. $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{2x}$

86. $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$,

87. $f(x) = x^4 \mathrm{e}^{-x}$,

88. $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$,

89. $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$,

90. $f(x) = x - \ln(x+1)$,

91. $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$,

92. $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$,

93. $f(x) = x - 2\operatorname{arctg} x$.

Opracowanie:
dr Igor Kierkosz
dr hab. Volodymyr Sushch